2. a) Explique las características cinemáticas del movimiento armónico simple.
b) Dos bloques, de masas M y m, están unidos al extremo libre de sendos resortes idénticos, fijos por el otro extremo a una pared, y descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Los bloques se separan de su posición de equilibrio una misma distancia A y se sueltan. Razone qué relación existe entre las energías potenciales cuando ambos bloques se encuentran a la misma distancia de sus puntos de equilibrio.

a) En esta cuestión (a mi juicio bastante larga para ser sólo un apartado) pueden tratarse muchos aspectos. Creo que al menos habría que hablar sobre:

- Definición de movimiento armónico simple (m.a.s.)
- Ecuación de movimiento $y(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$
- Magnitudes cinemáticas del m.a.s: Periodo, frecuencia, fase, fase inicial, velocidad de vibración, aceleración de vibración. Definición, fórmula y unidades
- Relación entre elongación y aceleración (ecuación fundamental del m.a.s) $a_y = -\omega^2 \cdot y$
- Dibujar algunas gráficas.

b) En la situación que nos dice el enunciado (masa unida a un resorte horizontal sin rozamiento), la única fuerza que interviene en el movimiento es la fuerza elástica del resorte, ya que la fuerza gravitatoria y la normal se anulan mutuamente.
Al ser todo el movimiento en horizontal, podemos obviar la energía potencial gravitatoria, eligiendo el nivel cero de potencial gravitatorio a la altura a la que se encuentran los bloques y los resortes.
La energía potencial será entonces energía potencial elástica, dada por $Ep_{el} = \frac{1}{2} K\, y^2$ donde
K es la constante elástica del resorte (e independiente de la masa)
y es la elongación, la distancia a la posición de equilibrio.

Teniendo en cuenta esto, si ambos resortes son idénticos y las masas están a la misma distancia de sus respectivas posiciones de equilibrio, la energía potencial es independiente de la masa de la partícula, por lo que tendrán idéntica energía potencial.

4. La energía mecánica de una partícula que realiza un movimiento armónico simple a lo largo del eje X y en torno al origen vale 3 ·10^{-5} J y la fuerza máxima que actúa sobre ella es de 1,5 · 10^{-3} N.
a) Obtenga la amplitud del movimiento.
b) Si el periodo de oscilación es de 2 s y en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición x_0 = 2 cm, escriba la ecuación de movimiento.

Nos encontramos ante una partícula que describe un m.a.s. (movimiento armónico simple, movimiento oscilatorio periódico en el que la aceleración es proporcional y de signo contrario a la distancia a la posición de equilibrio, o elongación)

a) La fuerza (o fuerzas) que originan un m.a.s. pueden ser de naturaleza muy variada (un cuerpo unido a un muelle, un péndulo con oscilaciones suficientemente pequeñas, un corcho que flota en el agua, los electrones en una corriente alterna...), pero matemáticamente todos pueden estudiarse como si se tratara de una fuerza elástica que actúa sobre el cuerpo (fuerza proporcional a la elongación y de sentido contrario). De este modo:

La fuerza elástica viene dada por $\vec{F}_{el} = -K \cdot \vec{x}$ en módulo $F_{el} = K \cdot x$, siendo K la constante elástica y x la elongación. *(también podríamos llamar "y" a la elongación, pero hay que especificarlo claramente)*

La fuerza máxima (en valor absoluto) se ejerce cuando la elongación es máxima (x = A, amplitud)
$F_{elMAX} = K \cdot A$

La energía mecánica del m.a.s. puede calcularse como la energía potencial elástica máxima (en ese momento su Ec es nula) cuando alcanza la máxima elongación
$E_M = \frac{1}{2} K A^2$ donde K es la constante elástica y A la amplitud del m.a.s.

Con los datos que nos dan, tenemosun sitema de dos ecuaciones con el que calculamos A y K

$F_{elMAX} = K \cdot A \rightarrow 1{,}5 \cdot 10^{-3}\, N = K \cdot A$
$E_M = \frac{1}{2} K A^2 \rightarrow 3 \cdot 10^{-5}\, J = 0{,}5 \cdot K \cdot A^2$ dividimos ambas expresiones (la 2ª entre la 1ª)

$$\frac{3 \cdot 10^{-5}}{1{,}5 \cdot 10^{-3}} = \frac{0{,}5 \cdot K \cdot A^2}{K \cdot A} \rightarrow 0{,}02 = 0{,}5 \cdot A \rightarrow A = 0{,}04\, m = 4\, cm$$

b) La ecuación de movimiento de un m.a.s. que oscila a lo largo del eje x, viene dada por
$x(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$ donde
x(t) es la elongación (distancia a la posición de equilibrio, tomada como punto de referencia) en cualquier instante.
A es la elongación máxima en valor absoluto.
ω es la frecuencia angular de oscilación. $\omega = \frac{2\pi}{T}$
y φ_0 es la fase inicial, que indica el estado del movimiento para t = 0 s. $x(0) = A \cdot sen\varphi_0$

La amplitud está calculada en el apartado anterior. A = 0,04 m

A partir del periodo, calculamos la frecuencia angular $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\, rad}{2\, s} = 3{,}14\, rad\, s^{-1}$

Y la fase inicial a partir de la posición inicial de la partícula

$$x(0) = A \cdot sen\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = arsen\left(\frac{x(0)}{A}\right) = arsen\left(\frac{0{,}02\, m}{0{,}04\, m}\right) = arsen(0{,}5) = 0{,}5236 rad = \pi / 6\, rad$$

Así, la ecuación de movimiento queda $x(t) = 0{,}04 \cdot sen(3{,}14 \cdot t + \frac{\pi}{6})\, m$

2. a) Explique el significado de las magnitudes que aparecen en la ecuación de un movimiento armónico simple e indique cuáles son sus respectivas unidades en el Sistema Internacional.
b) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento de la posición de equilibrio pero de sentido contrario.

a) La posición de un móvil que describe un m.a.s viene dada por una ecuación del tipo

$y = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \varphi_0)$ o $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$ donde:

y — Elongación. Es la posición del móvil respecto al punto de referencia, que se escoge siempre en su posición de equilibrio. Indica el desplazamiento desde dicha posición de equilibrio. Aunque usemos la letra “y”, se refiere a cualquier coordenada espacial (x, y, z) en la que se mueva. [y]= m (S.I.)

A — Amplitud del m.a.s. Es el valor máximo de la elongación (en valor absoluto). El m.a.s. alcanzará los valores de A y –A en los extremos de su movimiento. [A] = m (S.I.)

ω — Frecuencia angular. Indica el ritmo de oscilación (algo análogo a la velocidad angular en un movimiento circular). [ω] = rad s^{-1} (S.I.). A partir de ω podemos obtener

T — Periodo de oscilación. Tiempo que tarda el móvil en realizar una oscilación completa. Se calcula como

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ [T]= s (S.I.)

υ — Frecuencia. Número de oscilaciones descritas en la unidad de tiempo. Es la inversa del periodo

$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$ [υ]= ciclos/s = s^{-1} = Hz (Hertzio) (S.I.)

$\varphi = (\omega \cdot t + \varphi_0)$ — Fase. Es un ángulo que nos indica en qué estado de oscilación se encuentra el móvil. Se mide en radianes en el sistema internacional

φ_0 — Fase inicial. Valor de la fase para t = 0, cuando comenzamos a estudiar el movimiento. Nos permite calcular cómo era el movimiento al comenzar a estudiarlo. Por ej. La posición inicial se calculará sustituyendo t = 0 s en la ecuación, y quedará $y_0 = y_{(t=0)} = A \cdot sen\,(\varphi_0)$

b) A partir de la ecuación de la elongación “y” del m.a.s. $y = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Podemos obtener la velocidad de vibración derivando la elongación $v_y = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Y la aceleración derivando la velocidad $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot sen\,(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Comparando las expresiones de elongación y aceleración, vemos que $a_y = -\omega^2 \cdot y$, con lo que queda demostrado que la aceleración es proporcional al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio, pero en sentido contrario. La constante de proporcionalidad es el cuadrado de la frecuencia angular.

4. En una cuerda tensa se genera una onda viajera de 10 cm de amplitud mediante un oscilador de 20 Hz. La onda se propaga a 2 m·s^{-1}.
a) Escriba la ecuación de la onda suponiendo que se propaga de derecha a izquierda y que en el instante inicial la elongación en el foco es nula.
b) Determine la velocidad de una partícula de la cuerda situada a 1 m del foco emisor en el instante 3 s.

a) Una onda armónica (u onda viajera) consiste en la propagación de una perturbación (descrita por un movimiento armónico simple) a través de un medio. La ecuación general de la elongación (*y*) de un punto del medio respecto a la posición de equilibrio viene dada por $y(x,t) = A \cdot sen(\omega \cdot t \pm k \cdot x + \varphi_0)$, donde

A: Amplitud. Valor máximo de la elongación. A = 10 cm = 0,1 m.

υ : Frecuencia. Número de oscilaciones por segundo que realiza un punto del medio. υ = 20 Hz

ω: Frecuencia angular. Indica la rapidez de las oscilaciones. La calculamos a partir del periodo

$$\omega = 2\pi\upsilon = 125{,}66\, rad\, s^{-1}$$

k: Número de onda. Es una magnitud inversa a la longitud de onda (salvo un factor 2π).

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{125{,}66\, rad\, s^{-1}}{2\, m\, s^{-1}} = 62{,}83\, rad\, m^{-1}$$

φ_0: Fase inicial. Indica el estado de perturbación del foco generador de la onda en el instante inicial. La calculamos a partir de la elongación inicial del foco.

$$y_{(x=0,t=0)} = y_0 = A \cdot sen(\varphi_0) \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = arsen\left(\frac{y_0}{A}\right) = arsen\left(\frac{0}{0{,}1}\right) = 0\ rad$$

Como nos dicen que el movimiento es de derecha a izquierda, vemos que se mueve en el sentido negativo del eje x (suponiendo el criterio de signos positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda). En ese caso, las partes espacial y temporal de la fase aparecen sumadas.

La expresión queda: $y(x,t) = 0{,}1 \cdot sen(125{,}66 \cdot t + 62{,}83 \cdot x)\ m$

b) La velocidad de vibración nos indica cómo varía la elongación de las partículas que componen la cuerda respecto al tiempo.

$$v_y(x,t) = \frac{dy}{dt} = 0{,}1 \cdot 125{,}66 \cdot cos(125{,}66 \cdot t + 62{,}83 \cdot x)\ m\, s^{-1} = 12{,}566 \cdot cos(125{,}66 \cdot t + 62{,}83 \cdot x)\, m\, s^{-1}$$

Sustituyendo los valores x = 1 m y t = 3 s, obtenemos $v_y = 12{,}56\ m\ s^{-1}$

(Este no es el único resultado válido. Si hubiéramos escogido el criterio de signos al contrario (positivo a la izquierda y negativo a la derecha), la ecuación cambiaría $y(x,t) = 0{,}1 \cdot sen(125{,}66 \cdot t - 62{,}83 \cdot x)\ m$.
Y si hubiéramos escogido usar la función coseno en lugar de la función seno, la ecuación sería
$y(x,t) = 0{,}3 \cdot cos(125{,}66 \cdot t + 62{,}83 \cdot x)\ m$, *y la velocidad de la partícula sería diferente)*

2. a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas.
b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

a) Un movimiento armónico simple (m.a.s.) es un movimiento oscilatorio periódico, cuya elongación (desplazamiento) respecto a la posición de equilibrio (y) viene dada por una función sinusoidal $y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde A es la amplitud del movimiento, ω la frecuencia angular y φ_0 la fase inicial del movimiento.

La velocidad la obtenemos derivando la posición respecto al tiempo.

$$v_y = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Y la aceleración, derivando la velocidad respecto al tiempo $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Comparando las expresiones de posición y aceleración, comprobamos que se cumple que $a_y = -\omega^2 \cdot y$, es decir, la aceleración es proporcional al desplazamiento, y va en sentido contrario.

Dinámicamente, un sistema físico describe un m.a.s. cuando está sometido a una fuerza que es proporcional al deslazamiento respecto a una determinada posición (posición de equilibrio) y se opone a dicho desplazamiento. La ley de Hooke de los cuerpos elásticos es un ejemplo característico. Por ejemplo, para una partícula unida a un resorte, aplicando la 2º ley de Newton, obtenemos la expresión de la frecuencia característica de oscilación a partir de la masa de la partícula y de la constante elástica del resorte.

$$\left.\begin{array}{r} Fel = -K \cdot y \\ \Sigma F = m \cdot a_y = -m \cdot \omega^2 \cdot y \end{array}\right\} \quad K = m \cdot \omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

b) En la oscilación vertical, y despreciando el rozamiento, la partícula sólo está sometida a dos fuerzas conservativas, el peso y la fuerza elástica. Por consiguiente, la energía mecánica del sistema se mantendrá constante. Las energías presentes (cinética, potencial elástica y potencial gravitatoria) varían de la siguiente forma durante una oscilación completa:

$$Ec = \tfrac{1}{2} m \cdot v_y^2 \quad ; \quad Ep_{el} = \tfrac{1}{2} K \cdot y^2 \quad ; \quad Epg = mgh$$

En el punto más alto de la oscilación, la energía potencial gravitatoria es máxima, así como la elástica, ya que el muelle sufre su máxima compresión. En este punto la velocidad de la partícula es nula, por lo que la energía cinética también lo es.
Al descender, disminuyen las energías gravitatoria y cinética, al tiempo que aumenta la energía cinética, hasta pasar por la posición de equilibrio, donde la Ec es máxima y la Ep elástica es nula (estiramiento cero).
A partir de este momento, con el estiramiento del muelle, vuelve a aumentar la energía potencial elástica, a costa de la disminución de la cinética, que llega a anularse en el punto de máximo estiramiento (el más bajo de la trayectoria), siendo otra vez máxima la energía elástica. La energía gravitatoria alcanza su valor más bajo.

A partir de aquí, el proceso se repite a la inversa. Durante la subida disminuye la energía elástica almacenada, transformándose en energía cinética y energía gravitatoria. Al pasar por la posición de equilibrio, nuevamente la Ec es máxima y la elástica se anula. Finalmente, al seguir ascendiendo se comprime el muelle, con lo que la Ec disminuye hasta anularse en el punto más alto, al tiempo que la energía elástica vuelve a aumentar hasta su valor máximo.