Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Indica los valores de *m* para los que *A* es invertible.

b) Resuelve la ecuación $XA-B^t=C$ **para** $m=0$**. (**B^t **es la matriz traspuesta de B)**

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz *A* tiene inversa si su determinante es distinto de cero, luego:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix}=-m^2+4m-3=0 \Rightarrow m=1 \; ; \; m=3$$

Por lo tanto, la matriz *A* tendrá inversa para todos los valores de $m \neq 1 \; y \; m \neq 3$.

b) Calculamos la matriz inversa de *A*.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -3 & 12 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}^t}{-3}=\frac{\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-3}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz *X*.

$$XA-B^t=C \Rightarrow X=(C+B^t)\cdot A^{-1}=\left[\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que se verifica $2A-A^2=I$

b) Calcula A^{-1}**. (Sugerencia: Puedes usar la igualdad del apartado (a)).**

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$2A-A^2=2\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) De la igualdad del apartado a se deduce que:

$$2A-A^2=I\Rightarrow A\cdot\left(2I-A\right)=I\Rightarrow A^{-1}=2I-A$$

Luego: $A^{-1}=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Considera las siguientes matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1}.

b) Resuelve la ecuación matricial $A\cdot X\cdot A^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-a+2c & -b+2d\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a-2c-2b+4d & -b+2d\\ -c+2d & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a-2c-2b+4d & -b+2d\\ -c+2d & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a-2c-2b+4d=-1\\ -b+2d=0\\ -c+2d=2\\ d=1\end{array}\right\}\Rightarrow a=-1\ ;\ b=2\ ;\ c=0\ ;\ d=1$$

Luego: $X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Obtén un vector no nulo $v=(a,b,c)$, de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Para que el rango (A) = rango (B) = 2, sus determinantes deben valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}=b+a-c-b=a-c=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix}=-2c+3a-2b=0$$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $\left.\begin{array}{l} a-c=0 \\ 3a-2b-2c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=c \ ; \ b=\dfrac{c}{2} \ ; \ c=c$

Luego, el vector que nos piden es $v=\left(c,\dfrac{c}{2},c\right)$, siendo c cualquier número distinto de cero.

De la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que $\det(A)=4$. Se pide:

a) Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indica las propiedades que utilizas.

b) Calcula $\det(A^{-1}\cdot A^t)$

c) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3=I$, siendo I la matriz identidad, halla $\det(B)$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\det(-3A^t)=(-3)^2\det(A^t)=9\cdot\det(A)=9\cdot 4=36$$

$$\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}=2\cdot(-3)\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}=-6\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=6\cdot 4=24$$

Si en un determinante cambiamos dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

Si en un determinante hay un número que multiplica a una fila o columna, dicho numero sale fuera multiplicando al determinante.

b) $\det(A^{-1}\cdot A^t)=\det(A^{-1})\cdot\det(A^t)=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot\det(A)=1$

c) $\det(B^3)=\det(B\cdot B\cdot B)=\det(B)\cdot\det(B)\cdot\det(B)=\left[\det(B)\right]^3=1\Rightarrow\det(B)=\sqrt[3]{1}=1$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz X que cumpla la ecuación $AXB=C$

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La ecuación que tenemos que resolver es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -a+d & -b+e & -c+f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b+c & -b+2c \\ -a+d & b-e-c+f & b-e-2c+2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=3 \\ -b+c=1 \\ -b+2c=2 \\ -a+d=0 \\ b-e-c+f=1 \\ b-e-2c+2f=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow a=3\ ;\ d=3\ ; c=1\ ;\ b=0\ ;\ f=-2\ ;\ e=-4$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de λ para los que la matriz A^2+3A no tiene inversa.
b) Para $\lambda=0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $A\cdot X+A=2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz A^2+3A:

$$A^2+3A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+5\lambda+4 & 0\\ \lambda+3 & -2\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de dicha matriz

$$\left|A^2+3A\right|=\begin{vmatrix}\lambda^2+5\lambda+4 & 0\\ \lambda+3 & -2\end{vmatrix}=-2\lambda^2-10\lambda-8=0\Rightarrow\lambda=-1\ ;\ \lambda=-4$$

Luego, la matriz A^2+3A no tiene inversa para $\lambda=-1$ y $\lambda=-4$, ya que su determinante vale cero.

b) Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ a-c & b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}a=1\\ b=0\\ a-c=-1\\ b-d=3\end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, tenemos que la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \frac{1}{2}$ y $|B| = -2$.

Halla:

a) $|A^3|$

b) $|A^{-1}|$

c) $|-2A|$

d) $|AB^t|$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

e) El rango de B.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $|A^3| = |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) Sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow | A \cdot A^{-1} | = | A | \cdot | A^{-1} | = | I | = 1 \Rightarrow | A^{-1} | = \frac{1}{| A |}$; luego en nuestro caso será: $| A^{-1} | = \frac{1}{| A |} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

c) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n, sabemos que se cumple que $| k \cdot A | = k^n \cdot | A |$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $| -2A | = (-2)^3 \cdot | A | = (-8) \cdot \frac{1}{2} = -4$

d) $|A \cdot B^t| = |A| \cdot |B^t| = |A| \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$

e) Como $|B| = -2 \neq 0$, el rango de B es 3.

Dada la matriz $\mathbf{A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3=-I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.
c) Calcula razonadamente A^{100}
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego, se cumple que $A^3=-I$

b) Calculamos $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=15+12-16-12=-1\neq 0\Rightarrow$ Tiene inversa

Calculamos la inversa

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^{100}=A^{99}\cdot A=(A^3)^{33}\cdot A=(-I)^{33}\cdot A=-A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) ¿Hay algún valor de λ para el que *A* no tiene inversa?.

b) Para $\lambda=1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1}\cdot X\cdot A=B$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A.

$|A|=\lambda^2+1=0\Rightarrow$ No hay ningún valor real de λ para el cual el determinante valga cero, luego, siempre tiene inversa

b) Calculamos la matriz *X*:

$$A^{-1}\cdot X\cdot A=B\Rightarrow A\cdot A^{-1}\cdot X\cdot A\cdot A^{-1}=A\cdot B\cdot A^{-1}\Rightarrow X=A\cdot B\cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A:

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2}$$

$$X=A\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y A^2-B^2

b) Resuelve la ecuación matricial $XA-XB-(A+B)^t=2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $A+B$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 2A=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo, tenemos: $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos: $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial: $XA-XB-(A+B)^t=2I \Rightarrow X(A-B)-(A+B)^t=2I$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2a-b & 4a+2b \\ 2c-d & 4c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a-b=6 \\ 4a+2b=3 \\ 2c-d=2 \\ 4c+2d=4 \end{array}\right\}\Rightarrow a=\frac{15}{8};\ b=-\frac{9}{4};\ c=1;\ d=0$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{9}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A-2I$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Para $\lambda=-2$, resuelve la ecuación matricial $AX=2X+I$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A-2I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Igualamos el determinante de dicha matriz a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}=\lambda-2-\lambda^3+2\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=1\ ;\ \lambda=-1\ ;\ \lambda=2$$

Luego, la matriz tiene inversa para todos los valores de $\lambda \neq 1,-1\ y\ 2$

b) Resolvemos la ecuación matricial:

$$AX=2X+I \Rightarrow AX-2X=I \Rightarrow (A-2I)X=I \Rightarrow X=(A-2I)^{-1}\cdot I$$

$$\left(A-2I\right)^{-1}=\frac{((A-2I)^d)^t}{|A-2I|}=\frac{\begin{pmatrix} -4 & 15 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 15 & -4 \end{pmatrix}^t}{12}=\frac{\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}}{12}$$

Luego, la matriz es $X=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que $A^2+2A=I$ y que $A^{-1}=A+2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
b) Calcula la matriz X que verifica la ecuación: $A^2+XA+5A=4I$
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2+2A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I \Rightarrow \text{Es cierto.}$$

Multiplicamos la igualdad anterior por A^{-1} a la izquierda:

$$A^2+2A=I \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot A+2A^{-1}\cdot A=A^{-1}\cdot I \Rightarrow A+2I=A^{-1} \Rightarrow \text{Es cierto}$$

b) Vamos a resolver la ecuación matricial $A^2+XA+5A=4I$:

Multiplicamos por A^{-1} a la derecha.

$$A^2+XA+5A=4I \Rightarrow A\cdot A\cdot A^{-1}+X\cdot A\cdot A^{-1}+5A\cdot A^{-1}=4I\cdot A^{-1} \Rightarrow A+X+5I=4A^{-1} \Rightarrow X=4A^{-1}-A-5I$$

Sustituimos $A^{-1}=A+2I$

$$X=4A^{-1}-A-5I=4(A+2I)-A-5I=3(A+I)=3\cdot\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de A **dependiendo de los valores** α**.**

b) Para $\alpha=2$**, resuelve la ecuación matricial** $A\cdot X=B$ **.**

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y los igualamos a cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^3-3\alpha+2=0\Rightarrow \alpha=1\ ;\ \alpha=-2$$

Calculamos el rango de A para los distintos valores:

	R(A)
$\alpha=1$	1
$\alpha=-2$	2
$\alpha\neq 1\ y\ -2$	3

b) Calculamos la matriz inversa de A para $\alpha=2$.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t}{4}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{4}$$

Resolvemos la ecuación matricial.

$$A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de α **para los que la matriz inversa de** A **es** $\frac{1}{12}A$**.**

b) Para $\alpha=-3$**, determina la matriz X que verifica la ecuación** $A^t \cdot X = B$**, siendo** A^t **la matriz traspuesta de** A**.**

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz inversa de A

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}^t}{4\alpha}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha}=\frac{\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}}{12}\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & -\frac{1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{\alpha}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{4\alpha}=\frac{\alpha}{12} \\ -\frac{1}{4\alpha}=\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4}=-\frac{\alpha}{12} \end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=-3$$

El único valor que verifica todas las igualdades es $\alpha=-3$

b) Calculamos la matriz inversa de A para $\alpha=-3$: $(A)^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}}{-12}$

Por las propiedades de las matrices sabemos que: $\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t$, luego, la aplicamos para resolver la ecuación matricial

$$A^t\cdot X=B\Rightarrow X=(A^t)^{-1}\cdot B=(A^{-1})^t\cdot B=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 2 & -15 & -7 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{k} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores del parámetro *k* no existe la inversa de la matriz *A*?. Justifica la respuesta.

b) Para $k=0$, resuelve la ecuación matricial $(X+I)\cdot A=A^t$, donde *I* denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de *A*.

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*.

$$|A|=2k-1=0\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Luego, la matriz *A* no tiene inversa para $k=\frac{1}{2}$, ya que su determinante vale cero.

b) Calculamos la matriz inversa de *A* para $k=0$.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial:

$$(X+I)\cdot A=A^t\Rightarrow X\cdot A+I\cdot A=A^t\Rightarrow X\cdot A=A^t-I\cdot A$$

Si multiplicamos por A^{-1} a la derecha, tenemos:

$$X\cdot A=A^t-I\cdot A\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=A^t\cdot A^{-1}-I\cdot A\cdot A^{-1}\Rightarrow X=A^t\cdot A^{-1}-I$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$X=A^t\cdot A^{-1}-I=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica: $A\cdot X\cdot B=C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A\cdot X\cdot B=C^t \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C^t\cdot B^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}\cdot C^t\cdot B^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix}-3 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de B

$$(B)^{-1}=\frac{(B^d)^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=A^{-1}\cdot C^t\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Encuentra la matriz *X* que satisface la ecuación $XA+A^3B=A$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la inversa de A:

$$\left(A\right)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=A$$

Calculamos la matriz *X*: Si multiplicamos por A^{-1} a la derecha, tenemos:

$$X\cdot A+A^3B=A \Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}+A^3\cdot B\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1} \Rightarrow X=I_3-A^3\cdot B\cdot A^{-1}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=I_3-A^3\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$**, sea *B* la matriz que verifica** $AB=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$**.**

a) Comprueba que las matrices *A* y *B* poseen inversas.

b) Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X-B=BA$**.**

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $|A|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=3+10=13\neq 0\Rightarrow$ Tiene inversa

Sabemos que: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|\Rightarrow|B|=\dfrac{|A\cdot B|}{|A|}=\dfrac{-13}{13}=-1\neq 0\Rightarrow$ Tiene inversa

b) Si multiplicamos por *A* a la izquierda, tenemos:

$$A^{-1}X-B=BA\Rightarrow A\cdot A^{-1}X-A\cdot B=ABA\Rightarrow X=ABA+AB=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 43 & -8\end{pmatrix}$$

Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de *m* para que los vectores fila de *M* son linealmente independientes.
b) Estudia el rango de *M* según los valores de *m*.
c) Para $m = 1$, calcula la inversa de *M*.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz *M*:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + m = 0 \Rightarrow m = 0 \ ; \ m = -1$$

Para todos los valores de $m \neq 0 \ y \ -1$, el determinante es distinto de cero y los vectores son linealmente independientes.

b) Calculamos el rango de *M* según los valores de *m*.

	Rango(M)
$m = 0$	2
$m = -1$	2
$m \neq 0 \ y \ -1$	3

c) Calculamos la inversa de M para $m = 1$:

$$(M)^{-1} = \frac{(M^d)^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2=2I$ y calcula A^{-1}.

b) Calcula A^{2013} y su inversa.

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Comprobamos que $A^2=2I$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2I$$

Calculamos la inversa:

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^t}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

También la podemos calcular de la siguiente forma:

$$A^2=2I\Rightarrow A\cdot A=2I\Rightarrow A\cdot\left(\frac{1}{2}A\right)=I\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

b)

$$A^{2013}=A^{2012}\cdot A=(A^2)^{1006}\cdot A=(2I)^{1006}\cdot A=2^{1006}\cdot(I)^{1006}\cdot A=2^{1006}\cdot A=\begin{pmatrix}2^{1006} & 2^{1006}\\ 2^{1006} & -2^{1006}\end{pmatrix}$$

$$(A^{2013})^{-1}=A^{-1}\cdot A^{-1}\cdots(2013\ veces)\cdots A^{-1}\cdot A^{-1}=$$

$$=\frac{1}{2}A\cdot\frac{1}{2}A\cdots(2013\ veces)\cdots\frac{1}{2}A\cdot\frac{1}{2}A=$$

$$=\frac{1}{2^{2013}}A^{2013}=\frac{1}{2^{2013}}\cdot 2^{1006}\cdot A=\frac{1}{2^{1007}}\cdot A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}}\\ \frac{1}{2^{1007}} & -\frac{1}{2^{1007}}\end{pmatrix}$$

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 6\end{pmatrix}$

a) Halla A^{-1}**.**

b) Calcula la matriz X **que satisface** $A\cdot X=B^t\cdot C$ **(**B^t **es la traspuesta de B).**

c) Halla el determinante de $A^{2013}\cdot B^t\cdot B\cdot(A^{-1})^{2013}$**.**

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la inversa:

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}^t}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

b) $A\cdot X=B^t\cdot C\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B^t\cdot C\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B^t\cdot C$

Calculamos la matriz X

$$X=A^{-1}\cdot B^t\cdot C=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8\\ -1 & 14\\ 1 & -6\end{pmatrix}$$

Calculamos

$$|B^t\cdot B|=\left|\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 8 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\right|=8-4-4=0$$

Luego:

$$\left|A^{2013}\cdot B^t\cdot B\cdot(A^{-1})^{2013}\right|=|A|^{2013}\cdot|B^t\cdot B|\cdot\left|\frac{1}{A}\right|^{2013}=|B^t\cdot B|=0$$

Sabiendo que el determinante de una matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes, indicando en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$

b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como *A* es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8) \cdot 4 = -32$

Por otro lado, sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{4}$

b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & c \\ d & -e & f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo".

$$\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 = -12$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo".

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
a) Calcula X e Y tales que $X-Y=A^t$ y $2X-Y=B$ (A^t es la matriz traspuesta de A).
b) Calcula Z tal que $AZ=BZ+A$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema matricial $\left.\begin{array}{l} X-Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\\ 2X-Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right\}$

Si cambiamos la primera ecuación de signo y sumamos, tenemos que: $X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ y

sustituyendo en la primera ecuación tenemos que: $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}-Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

b) $AZ=BZ+A\Rightarrow(A-B)Z=A\Rightarrow Z=(A-B)^{-1}\cdot A$

Calculamos $(A-B)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

Calculamos su inversa: $(A-B)^{-1}=\dfrac{\left[(A-B)^d\right]^t}{|A-B|}=\dfrac{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}^t}{1}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

Luego, $Z=(A-B)^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

Sean A y B las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$

a) Calcula las matrices X **e** Y **para las que** $2X-Y=A$ **y** $X-3Y=B$**.**

b) Halla la matriz Z **que verifica** $B^2+ZA+B^t=3I$ **(**I **denota la matriz identidad y** B^t **la matriz traspuesta de** B**).**

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema matricial $\left.\begin{array}{l} 2X-Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ X-3Y=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

Si multiplicamos la segunda ecuación por -2 y sumamos, tenemos que:

$$5Y=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación tenemos que: $X=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B^2+ZA+B^t=3I \Rightarrow ZA=3I-B^2-B^t \Rightarrow Z=(3I-B^2-B^t)\cdot A^{-1}$

Calculamos $(3I-B^2-B^t)=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix}$

Calculamos su inversa: $A^{-1}=\dfrac{(A^d)^t}{|A|}=\dfrac{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t}{1}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Luego, $Z=(3I-B^2-B^t)\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}$

Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es $\det(M) = 2$. Calcula:
a) El rango de M^3.
b) El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M).
c) El determinante de $(M^{-1})^2$.
d) El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $\left|M^3\right| = \left|M \cdot M \cdot M\right| = \left|M\right| \cdot \left|M\right| \cdot \left|M\right| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 0 \Rightarrow$ El rango es 3

b) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n, sabemos que se cumple que $\left|k \cdot A\right| = k^n \cdot \left|A\right|$; en nuestro caso como M es una matriz de orden 3, tenemos que: $\left|2M^t\right| = \left|2M\right| = (2)^3 \cdot \left|M\right| = (8) \cdot 2 = 16$

c) Sabemos que: $M \cdot M^{-1} = I \Rightarrow \left|M \cdot M^{-1}\right| = \left|M\right| \cdot \left|M^{-1}\right| = \left|I\right| = 1 \Rightarrow \left|M^{-1}\right| = \dfrac{1}{\left|M\right|}$; luego en nuestro caso será: $\left|M^{-1}\right|^2 = \dfrac{1}{\left|M\right|^2} = \dfrac{1}{4}$

d) Si en un determinante cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo, luego, el determinante de N vale -2

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$

a) Halla, si es posible, A^{-1} **y** B^{-1}**.**

b) Halla el determinante de $AB^{2013}A^{t}$**,** A^{t} **la matriz traspuesta de** A**.**

c) Calcula la matriz X **que satisface** $A\cdot X-B=AB$**.**

MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz inversa de A.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^{d})^{t}}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}^{t}}{2}=\frac{\begin{pmatrix}2&0&-1\\-2&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

La matriz B no tiene inversa, ya que su determinante vale 0.

b) $\left|AB^{2013}A^{t}\right|=|A|\cdot\left|B^{2013}\right|\cdot\left|A^{t}\right|=2\cdot 0^{2013}\cdot 2=0$

c) Resolvemos la ecuación matricial.

$$A\cdot X=B+AB\Rightarrow X=A^{-1}(B+AB)=A^{-1}B+B=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2&2&\frac{5}{2}\\3&-3&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **;** $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz ***X*** **que verifica** $A\cdot X+B=A^2$

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La matriz *A* tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$A\cdot X=A^2-B\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot A^2-A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A-A^{-1}\cdot B=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Se sabe que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ **es** -3**, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:**

a) $\det(-2A)$ **y** $\det(A^{-1})$

b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ **y** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k\cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como *A* es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8)\cdot(-3) = 24$

Por otro lado, sabemos que: $A\cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$

b) $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 7\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -7\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -7\cdot 2\cdot(-3) = 42$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo".

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2\cdot 5\cdot 0 = 5\cdot(-3) = -15$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el tercer paso hemos aplicado la propiedad: "Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero".

Considera las matrices $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$ **;** $\boldsymbol{B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$

a) Calcula $\boldsymbol{A^{-1}}$**.**

b) Hallar la matriz $\boldsymbol{X}$ **que verifica** $\boldsymbol{A^t \cdot X + B = I}$**, siendo** $\boldsymbol{I}$ **la matriz identidad y** $\boldsymbol{A^t}$ **la matriz traspuesta de** $\boldsymbol{A}$**.**

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz A tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz que nos piden:

$$A^t \cdot X + B = I \Rightarrow A^t \cdot X = I - B \Rightarrow (A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X = (A^t)^{-1} \cdot I - (A^t)^{-1} \cdot B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot I - (A^t)^{-1} \cdot B = (A^t)^{-1} - (A^t)^{-1} \cdot B$$

$$X=(A^t)^{-1}-(A^t)^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & -10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -3 & 14 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m se verifica que $A^2=2A+I$?.

b) Para $m=1$, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $A\cdot X-B=A\cdot B$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos

$$A^2=\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1+m)^2+1 & (1+m)+(1-m) \\ (1+m)+(1-m) & 1+(1-m)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m^2+2m+2 & 2 \\ 2 & m^2-2m+2 \end{pmatrix}$$

$$2A+I=\begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}$$

$$A^2=2A+I\Rightarrow\begin{pmatrix} m^2+2m+2 & 2 \\ 2 & m^2-2m+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix} m^2+2m+2=3+2m \\ m^2-2m+2=3-2m \end{matrix}\right\}\Rightarrow m=\pm 1$$

b) Calculamos la matriz inversa de A.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X que nos piden:

$$A\cdot X-B=A\cdot B\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X-A^{-1}\cdot B=A^{-1}\cdot A\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B+B$$

$$X=A^{-1}\cdot B+B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}}$ **y** $\boldsymbol{B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}}$

Halla la matriz $\boldsymbol{X}$ **que verifica:** $\boldsymbol{A^{-1}\cdot X\cdot A=B-A}$**.**

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la matriz inversa de A

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 5 & -2\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$A^{-1}\cdot X\cdot A=B-A\Rightarrow A\cdot A^{-1}\cdot X\cdot A=A\cdot B-A\cdot A\Rightarrow X\cdot A=A\cdot B-A\cdot A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=A\cdot B\cdot A^{-1}-A\cdot A\cdot A^{-1}\Rightarrow X=A\cdot B\cdot A^{-1}-A$$

$$X=A\cdot B\cdot A^{-1}-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -2\\ -2 & -5 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -5 & 2\\ -1 & 16 & -6\\ -2 & 40 & -15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -5 & 2\\ -1 & 18 & -7\\ -2 & 45 & -18\end{pmatrix}$$

Se sabe que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3, calcula los siguientes determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) $\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$ y $\det(A+A^t)$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $|A^3| = |A|\cdot|A|\cdot|A| = 3\cdot 3\cdot 3 = 27$

Por otro lado, sabemos que: $A\cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{3}$

La matriz que nos dan es simétrica, por lo tanto, $A = A^t \Rightarrow |A+A^t| = |2A|$

Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k\cdot A| = k^n\cdot|A|$; en nuestro caso como *A* es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A| = (2)^3\cdot|A| = 8\cdot 3 = 24$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ b & d & e \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = -2\cdot(3) = -6$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo”.

c) $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & d & b \\ c & e & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 4\cdot 0 - 3 = -3$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el tercer paso hemos aplicado la propiedad: “Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero”.

Sabiendo que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) $\det(3A)$ .b) $\det(A^{-1})$ .c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ .d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k\cdot A| = k^n\cdot |A|$; en nuestro caso como *A* es una matriz de orden 3, tenemos que: $|3A| = (3)^3\cdot |A| = (27)\cdot(2) = 54$

b) Sabemos que: $A\cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{2}$

c) $$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2y & z \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot(-2) = -12$$

En el primer paso y en el segundo hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el tercer paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo".

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes". Y también la propiedad: "Si un determinante tiene dos filas o dos columnas proporcionales, el determinante vale cero".

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$

a) Encuentra el valor, o los valores, de *m* para los que *A* y *B* tienen el mismo rango.
b) Determina, si existen, los valores de *m* para los que *A* y *B* tienen el mismo determinante.
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de cada matriz y lo igualamos a cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix}=-m-4=0 \Rightarrow m=-4$$

	R(*A*)
$m=-4$	1
$m\neq -4$	2

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix}=m^2+4m=0 \Rightarrow m=0\ ;\ m=-4$$

	R(*B*)
$m=0$	2
$m=-4$	2
$m\neq 0\ y\ -4$	3

Luego, para $m=0$ el rango de A es igual al rango de B y vale 2.

b) Igualamos los dos determinantes

$$-m-4=m^2+4m \Rightarrow m^2+5m+4=0 \Rightarrow m=-1\ ;\ m=-4$$

Luego, para $m=-1\ y\ m=-4$, el det(*A*)=det(*B*)

Halla la matriz X que verifica la igualdad $A \cdot X \cdot A^{-1} + B = C \cdot A^{-1}$ sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos la matriz X

$$A \cdot X \cdot A^{-1} + B = C \cdot A^{-1} \Rightarrow A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A + B \cdot A = C \cdot A^{-1} \cdot A \Rightarrow A \cdot X \cdot I + B \cdot A = C \cdot I \Rightarrow A \cdot X + B \cdot A = C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \cdot X = C - B \cdot A \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A)$$

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$

a) Halla el valor, o valores, de *m* para los que la matriz *A* tiene rango 2.
b) Para $m=1$, determina A^{2015}.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A* y lo igualamos a cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix}=-m^3+2m^2-m=0\Rightarrow m=0\ ;\ m=1$$

Si $m=0\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y como el $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow$ Rango(*A*) = 2

Si $m=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y como el $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow$ Rango(*A*) = 2

b) Si $m=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego: $A^{2015}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

a) Halla el determinante de una matriz *X* que verifique la igualdad $X^2\cdot A\cdot X=B$ **.**

b) Determina, si existe, la matriz *Y* que verifica la igualdad $A^2\cdot Y\cdot B^{-1}=A$ **.**

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$X^2\cdot A\cdot X=B\Rightarrow\left|X^2\cdot A\cdot X\right|=|B|\Rightarrow|X|\cdot|X|\cdot|A|\cdot|X|=|B|\Rightarrow|X|^3=\frac{|B|}{|A|}=\frac{8}{-1}\Rightarrow|X|=\sqrt[3]{-8}=-2$$

b) Despejamos la matriz *Y*, para ello multiplicamos por A^{-1} a la izquierda y por B a la derecha

$$A^2\cdot Y\cdot B^{-1}=A\Rightarrow A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A\cdot A\cdot Y\cdot B^{-1}\cdot B=A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A\cdot B\Rightarrow A^{-1}\cdot I\cdot A\cdot Y\cdot I=A^{-1}\cdot I\cdot B\Rightarrow Y=A^{-1}\cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de *A*.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz *Y*

$$Y=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

a) Halla la matriz *X* que verifica $A\cdot X-B=I$ (I denota la matriz identidad de orden 3).

b) Calcula el determinante de la matriz $(A^2\cdot B^{-1})^{2015}$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos la matriz *X*, para ello multiplicamos por A^{-1} a la izquierda

$$A\cdot X-B=I\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X-A^{-1}\cdot B=A^{-1}\cdot I\Rightarrow X=A^{-1}\cdot(B+I)$$

Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix}6&-5&1\\-6&8&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6&-5&1\\-6&8&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz *X*

$$X=A^{-1}\cdot(B+I)=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6&-5&1\\-6&8&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6&-5&1\\-6&8&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4&7&1\\6&-8&2\\-2&3&-1\end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de *A* y de *B*

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2\ ;\quad |B|=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=4$$

$$|A^2\cdot B^{-1}|^{2015}=\left(|A|\cdot|A|\cdot|B^{-1}|\right)^{2015}=\left(2\cdot2\cdot\frac{1}{|B|}\right)^{2015}=\left(2\cdot2\cdot\frac{1}{4}\right)^{2015}=1$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **;** $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz *X* para la que $A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C$ **, (** A^t **la matriz traspuesta de *A*).**

b) Calcula el determinante de $B^{-1}(C^t \cdot C) \cdot B$ **, (** C^t **la matriz traspuesta de C).**

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos la matriz *X*

$$A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C \Rightarrow (A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X \cdot B^{-1} \cdot B = (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B \Rightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\left(A^t\right)^{-1} = \frac{((A^t)^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz *X*

$$X = (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -21 & 10 & 0 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & \frac{10}{3} & 0 \\ -3 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left| B^{-1} \cdot (C^t \cdot C) \cdot B \right| = \left| B^{-1} \right| \cdot \left| C^t \cdot C \right| \cdot \left| B \right| = \frac{1}{|B|} \cdot \left| C^t \cdot C \right| \cdot \left| B \right| = \left| C^t \cdot C \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}$

a) Halla la matriz X que verifica $A\cdot X+B=2A$.

b) Calcula B^2 y B^{2016}.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si multiplicamos los dos términos de la ecuación por A^{-1} a la izquierda, nos queda:

$$A\cdot X+B=2A\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X+A^{-1}\cdot B=2A^{-1}\cdot A\Rightarrow X=2I-A^{-1}\cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=2I-A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-11&9&5\\-8&7&4\\-6&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-9&-5\\8&-5&-4\\6&-5&-1\end{pmatrix}$$

b) Calculamos

$$B^2=\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}$$

$$B^4=B^3\cdot B=\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$B^{2016}=\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A\cdot X+B^2=B\cdot X+A^2$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz *X*:

$$A\cdot X+B^2=B\cdot X+A^2 \Rightarrow A\cdot X-B\cdot X=A^2-B^2 \Rightarrow (A-B)\cdot X=A^2-B^2 \Rightarrow X=(A-B)^{-1}\cdot(A^2-B^2)$$

Calculamos la matriz inversa de $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A-B)^{-1}=\frac{((A-B)^d)^t}{|A-B|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^2, B^2 y A^2-B^2

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=(A-B)^{-1}\cdot(A^2-B^2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de k en cada uno de los casos siguientes: a) $Rango(A)=1$. b) $A^2=A$. c) A tiene inversa. d) $\det(A)=-2$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} = k^2-1=0 \Rightarrow k=1\,;\, k=-1$$

Luego, el rango de A es 1 si $k=1$ $ó$ $k=-1$

b)

$$A^2=A \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k+k^2 \\ k-k^2 & 1-k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=k \Rightarrow k=1 \\ k+k^2=1+k \Rightarrow k=1\,;\, k=-1 \\ k-k^2=1-k \Rightarrow k=1 \\ 1-k^2=0 \Rightarrow k=1\,;\, k=-1 \end{cases}$$

Luego, para $k=1$, se cumple que $A^2=A$

c) A tiene inversa para todos los valores de $k\neq 1$ y $k\neq -1$. Ya que es una matriz cuadrada y para esos valores su determinante es distinto de cero.

d) $\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow k^2-1=-2 \Rightarrow k^2+1=0$

No hay ningún valor de k que haga que su determinante valga -2

Considera la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, si existen, los valores de λ para los que $A^{-1}=2I-A$ (siendo I la matriz identidad de orden 3).

b) Determina, si existen, los valores de λ para los que la matriz $A+A^t$ no tiene inversa (A^t es la matriz traspuesta de A).

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda-1 & \lambda^2+\lambda+1 & 1 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=2I-A\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\lambda^2+\lambda+1=1\Rightarrow\lambda^2+\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\ ;\lambda=-1$$

b) Calculamos

$$A+A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda+1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ \lambda+1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante.

$$|A+A^t|=\begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ \lambda+1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-6\lambda^2-6\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{6}$$

Luego, la matriz $A+A^t$ no tiene inversa si $\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{6}$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de $A\cdot B^t+\lambda I$ **según los valores de** λ **(**B^t **es la matriz traspuesta de** ***B***, ***I*** **es la matriz identidad de orden 3).**

b) Calcula la matriz ***X*** **que verifica:** $C\cdot X-X=2I$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A\cdot B^t+\lambda I$

$$A\cdot B^t+\lambda I=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1\\-1&-1+\lambda&-1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$\left|A\cdot B^t+\lambda I\right|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\-1&-1+\lambda&-1\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda+\lambda=0\Rightarrow\lambda=0$$

Si $\lambda\neq 0\Rightarrow$ Rango(A) = 3.
Si $\lambda=0\Rightarrow$ Rango(A) = 1.

b) $C\cdot X-X=2I\Rightarrow(C-I)\cdot X=2I\Rightarrow X=(C-I)^{-1}\cdot 2I=2(C-I)^{-1}$

Calculamos la matriz $C-I=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$

Calculamos la matriz inversa de $C-I$.

$$(C-I)^{-1}=\frac{((C-I)^d)^t}{|C-I|}=\frac{\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=2\cdot\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2&-2\\2&0&2\\0&0&-2\end{pmatrix}$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $(A+B)$

b) Calcula el determinante de $2A^{-1}(A+B)^t$, siendo $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $(A+B)$.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos *A*+*B*

$$A+B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa

$$\left(A+B\right)^{-1}=\frac{((A+B)^d)^t}{|A+B|}=\frac{\begin{pmatrix} -10 & 20 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^t}{24}=\frac{\begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}}{24}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

b) Sabemos que:

- Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k\cdot A|=k^n\cdot|A|$; en nuestro caso como *A* es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A^{-1}|=2^3|A^{-1}|$
- $A\cdot A^{-1}=I\Rightarrow|A\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|=|I|=1\Rightarrow|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{4}$
- $|(A+B)^t|=|(A+B)|$

Por lo tanto:

$$|2A^{-1}(A+B)^t|=|2A^{-1}|\cdot|(A+B)^t|=2^3|A^{-1}|\cdot|(A+B)^t|=2^3\cdot\frac{1}{|A|}\cdot|(A+B)|=8\cdot\frac{1}{4}\cdot 24=48$$

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz *X* que verifica que $ABX-2C=CX$ **.**
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X

$$ABX-2C=CX\Rightarrow ABX-CX=2C\Rightarrow(AB-C)X=2C\Rightarrow(AB-C)^{-1}(AB-C)X=(AB-C)^{-1}2C\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X=(AB-C)^{-1}2C$$

$$AB-C=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1&3\\8&1&3\\2&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2&3\\9&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa:

$$(AB-C)^{-1}=\frac{((AB-C)^d)^t}{|AB-C|}=\frac{\begin{pmatrix}0&2&1\\0&-3&-2\\-1&15&12\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}0&0&-1\\2&-3&15\\1&-2&12\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&3&-15\\-1&2&-12\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=(AB-C)^{-1}2C=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&3&-15\\-1&2&-12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&4&2\\2&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-40&38&-24\\-30&30&-20\end{pmatrix}$$

Considera la matriz $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$

a) Comprueba que $\boldsymbol{A\cdot A^t - 2A = I}$ **(** $\boldsymbol{A^t}$ **denota la traspuesta de** ***A*** **e** ***I*** **la matriz identidad).**
b) Calcula $\boldsymbol{A^{-1}}$**.**
c) Determina, si existe, la matriz ***X*** **que verifica** $\boldsymbol{XA+I=3A}$**.**
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $A\cdot A^t - 2A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

b) Calculamos la inversa .

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz *X*.

$$XA + I = 3A \Rightarrow XX = A = 3A - I \Rightarrow XA\cdot A^{-1} = (3A-I)\cdot A^{-1} \Rightarrow X = (3A-I)\cdot A^{-1}$$

Calculamos la matriz *X*.

$$X = (3A-I)\cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz $3x3$ tal que $\det(2A)=8$.
a) ¿Cuánto vale $\det(A)$?
b) Siendo B la matriz que se obtiene de A multiplicando por 3 la primera fila y por -1 la tercera, ¿cuánto vale $\det(B)$?
c) Determina los valores de x para los que la siguiente matriz A verifica que $\det(2A)=8$,

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n, sabemos que se cumple que $|k\cdot A|=k^n\cdot|A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A|=(2)^3\cdot|A|=8\Rightarrow|A|=1$

b) $|B|=3\cdot(-1)\cdot|A|=3\cdot(-1)\cdot 1=-3$

c) Calculamos el determinante de la matriz $2A$

$$|2A|=2\begin{vmatrix} 2x & 2 & 2 \\ 2x+2 & 4 & 4 \\ 2x & -2x+4 & 2 \end{vmatrix}=2^3\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{vmatrix}=8\Rightarrow x^2-2x+1=1\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & m-1\\ 0 & m-1 & 2-m\\ 0 & -1 & 2-m\end{pmatrix}$ $\quad y \quad$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

a) Determina los valores de *m* para los que la matriz *A* no tiene inversa.

b) Para $m=1$, calcula, si existe, la matriz *X* que verifica la igualdad $A^{-1}XA+I=B$, siendo *I* la matriz identidad.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & m-1\\ 0 & m-1 & 2-m\\ 0 & -1 & 2-m\end{vmatrix}=-m^2+2m=0\Rightarrow m=0\ ;\ m=2$$

Luego, no tiene inversa para los valores de $m=0\ y\ m=2$

b) Calculamos la inversa de *A* para $m=1$.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz *X*.

$$A^{-1}XA+I=B\Rightarrow A^{-1}XA=B-I\Rightarrow A\cdot A^{-1}XA\cdot A^{-1}=A\cdot(B-I)\cdot A^{-1}\Rightarrow X=A\cdot(B-I)\cdot A^{-1}$$

Calculamos la matriz *X*.

$$X=A\cdot(B-I)\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

Considera $A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A **según los valores de** k**.**

b) Para $k=1$**, calcula el determinante de** $2\left(A^t\cdot A^{-1}\right)^{2017}$**, siendo** A^t **la traspuesta de** A**.**

MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} = 2k^3+3k^2+k=0 \Rightarrow k=0\ ;\ k=-1\ ;\ k=-\frac{1}{2}$$

Calculamos el rango de la matriz para cada caso.

Para $k=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $k=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $k=-\frac{1}{2} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $k\neq 0,-1,-\frac{1}{2} \Rightarrow R(A)=3$

b) Calculamos el determinante que nos piden

Sabemos que: $\left|A^t\right|=|A|$; $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$; $|m\cdot A|=m^n|A|$ siendo n el orden de la matriz.

Por lo tanto:

$$\left|2\left(A^t\cdot A^{-1}\right)^{2017}\right| = \left|(2\cdot A^t)\cdot(A^{-1})\cdot(A^t\cdot A^{-1})^{2016}\right| = 2^3\cdot|A|\cdot\frac{1}{|A|}\cdot\left(|A|\cdot\frac{1}{|A|}\right)^{2016}=8$$

Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\1&0&1\\-1&2&-2\end{pmatrix}\ ;\ C=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\ \text{ y }\ D=\begin{pmatrix}4&-5&6\end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica que: $A^2X-BA+X=CD$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X

$$A^2X-BA+X=CD\Rightarrow A^2X+X=CD+BA\Rightarrow (A^2+I)X=CD+BA\Rightarrow X=(A^2+I)^{-1}(CD+BA)$$

Calculamos A^2+I

$$A^2+I=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2\cdot I$$

Calculamos $(A^2+I)^{-1}=(2\cdot I)^{-1}=2^{-1}\cdot I^{-1}=\frac{1}{2}\cdot I$

Luego:

$$X=(A^2+I)^{-1}(CD+BA)=\frac{1}{2}\cdot I\cdot(CD+BA)=\frac{1}{2}\cdot(CD+BA)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&2&-1\\1&0&1\\-1&2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}4&-5&6\\-8&10&-12\\12&-15&18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&-1&0\\1&2&-2\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-4&4\\-9&9&-12\\13&-13&16\end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix}$

a) Calcula A^{2018}**.**

b) Determina, si existe, la matriz X **que verifica** $A(X+2I)=BC$ **donde** I **es la matriz identidad.**

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos: $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $A^{2018}=\begin{pmatrix}1&2018&2018\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) Si multiplicamos los dos términos de la ecuación por A^{-1} a la izquierda, nos queda:

$$A\cdot(X+2I)=BC\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot(X+2I)=A^{-1}\cdot B\cdot C\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B\cdot C-2I$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=A^{-1}\cdot B\cdot C-2I=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\1&-1&2\\-1&-1&-4\end{pmatrix}$$

Considera la matriz $M=\begin{pmatrix}1&2&3\\6&0&3\\x&y&z\end{pmatrix}$. Sabiendo que el determinante de M es 2, calcula los siguientes determinantes e indica las propiedades que utilices:

a) El determinante de la matriz $5M^4$; b) $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&2&3\\x&y&z\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}1&x+6&x\\2&y&y\\3&z+3&z\end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que: $|k\cdot A_n|=k^n\cdot|A|$ y que: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$, luego:

$$|5M^4|=|5M\cdot M\cdot M\cdot M|=|5M||M|\cdot|M|\cdot|M|=5^3|M|\cdot|M|\cdot|M|\cdot|M|=5^3\cdot 2^2=2000$$

b) $$\begin{vmatrix}2&0&1\\1&2&3\\x&y&z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\2&0&1\\x&y&z\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot 3\begin{vmatrix}1&2&3\\2&0&1\\x&y&z\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&2&3\\6&0&3\\x&y&z\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot 2=-\frac{2}{3}$$

Propiedades aplicadas

- Si en un determinante se intercambian dos líneas, el determinante cambia de signo
- Para multiplicar un determinante por un número basta con multiplicar una línea.

c) $$\begin{vmatrix}1&x+6&x\\2&y&y\\3&z+3&z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x&x\\2&y&y\\3&z&z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&6&x\\2&0&y\\3&3&z\end{vmatrix}=0+\begin{vmatrix}1&6&x\\2&0&y\\3&3&z\end{vmatrix}=2$$

Propiedades aplicadas

- Si una línea de una determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes. En el primero ponemos el primer sumando y en el segundo el segundo sumando.
- Si un determinante tiene dos líneas iguales, el determinante vale 0.
- El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

a) Halla, si existe, la inversa de A.

b) Determina los valores de m tales que $(A-mI)$ tiene inversa (I es la matriz identidad).

c) Calcula el rango de $(A-2I)$.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y los igualamos a cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=4\neq 0 \Rightarrow \text{ Si tiene inversa}$$

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{4}=\frac{\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{4}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz $A-mI=\begin{pmatrix} -m & -1 & -2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & 3-m \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -m & -1 & -2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & 3-m \end{vmatrix}=-m^3+5m^2-8m+4=0\Rightarrow m=1\ ;\ m=2$$

Luego, tiene inversa para todos los valores de $m\neq 1\ y\ 2$

c) Calculamos el rango de $A-2I$:

$$A-2I=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow R(A-2I)=2$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina, si existen, los valores de *a, b* y *c* para que las matrices *A* y *B* conmutan.

b) Calcula A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018}**.**

c) Calcula, si existe, la matriz inversa de A

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si conmutan, se tiene que cumplir que $A\cdot B = B\cdot A$, luego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow a=b=0; c=-1$$

b)

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

$$A^3=A\cdot A^2=A\cdot I=A$$

$$A^{2017}=A^{2016}\cdot A=\left(A^2\right)^{1008}\cdot A=\left(I\right)^{1008}\cdot A=A$$

$$A^{2018}=\left(A^2\right)^{1009}=\left(I\right)^{1009}=I$$

c) Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=A$$

En el apartado anterior ya habíamos visto que $A\cdot A=I\Rightarrow A=A^{-1}$