ALGUNOS EJERCICIOS RESUELTOS DE MOMENTO ANGULAR Y ESTÁTICA (TEMA 1)

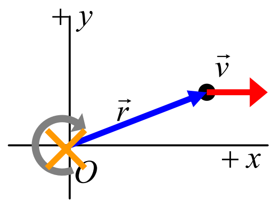
(del boletín de problemas)

1.- Una partícula de masa 2 kg, y cuya posición respecto al origen en un determinado instante viene dada por $\vec{r} = 3\vec{i} + \vec{j}$ (m), se mueve en ese mismo instante con una velocidad $\vec{v} = 2\,\vec{i}$ (m/s). Calcular:

a) Cantidad de movimiento de la partícula.

b) Momento angular respecto al origen.

c) Repetir el problema si $\vec{v} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ m/s.



a) La cantidad de movimiento de la partícula indica la intensidad con la que un cuerpo se desplaza. Se calcula con la expresión $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = 2\,kg \cdot 2\,\vec{i}\,m\,s^{-1} = 4\,\vec{i}\ kg\,m\,s^{-1}$

b) El momento angular respecto a un punto (el punto origen O en este caso) indica la tendencia a girar del cuerpo (o de su vector de posición) respecto al punto O. Su expresión es

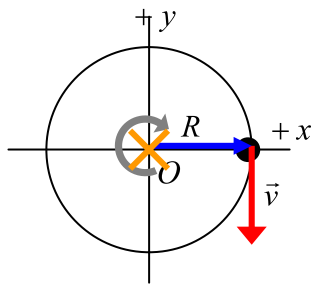
$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = (3\,\vec{i} + \vec{j})m \wedge (4\,\vec{i}\,)m\,s^{-1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\,\vec{k}\ kg\,m^2\,s^{-1}$$

c) En el caso de que la velocidad sea $\vec{v} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ m/s, las operaciones quedarán

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = 2\,kg \cdot (\,\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\,)m\,s^{-1} = 2\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 6\,\vec{k}\ kg\,m\,s^{-1}$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = (3\,\vec{i} + \vec{j})m \wedge (\,\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\,)m\,s^{-1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6\,\vec{i} - 18\,\vec{j} - 14\,\vec{k}\ kg\,m^2\,s^{-1}$$

2.- Un LP de vinilo (de 30 cm de diámetro) gira en sentido horario a 33 rpm. Una mosca se posa en el extremo del disco, y da vueltas al mismo ritmo. Calcular el momento angular de la mosca respecto al centro del disco, suponiendo que su masa es de 0,05 g. ($\vec{L}_O = -\,3{,}89 \cdot 10^{-6}\ \vec{k}\ \ kg\,m^2\,s^{-1}$)



Datos: $R = D/2 = 0{,}15\ m;$

$$\omega = 33\ rpm = 33 \cdot \frac{2\pi\ rad}{60\ s} = 3{,}46\ rad\ s^{-1} \rightarrow\ v = \omega \cdot R = 3{,}46\ rad\ s^{-1} \cdot 0{,}15m = 0{,}519\ m/s$$

El momento angular de una partícula nos indica la tendencia a girar de la misma respecto al punto de referencia O que hayamos escogido. Viene dado por la expresión $\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$.

En este problema calcularemos por separado módulo, dirección y sentido del vector.

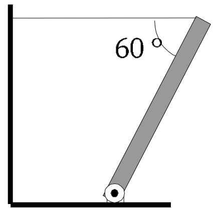
Módulo: $L_O = r \cdot m \cdot v \cdot sen\alpha = 0{,}15m \cdot 5 \cdot 10^{-5}\,kg \cdot 0{,}519\,m\,s^{-1} \cdot sen90^o = 3{,}89 \cdot 10^{-6}\ kg\,m^2 s^{-1}$

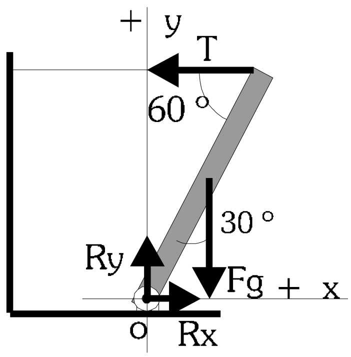
Dirección: $\vec{L}_O$ es perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{v}$. → Va en el eje z (dibujo)

Sentido: Regla de la mano derecha (dibujo) → Sentido negativo del eje z.

Por lo tanto, el vector momento angular será $\vec{L}_O = -\,3{,}89 \cdot 10^{-6}\ \vec{k}\ \ kg\,m^2\,s^{-}$

Un puente levadizo de madera mide 5 m y tiene una masa de 400 kg, y está dispuesto como indica la figura. Calcular la tensión del cable y las reacciones que ejerce la bisagra.





Esquema de fuerzas: elegimos el punto O en la bisagra (punto respecto al que puede girar el puente). Las fuerzas aplicadas son:

- Peso (Fg = m · g = 4000 N). Aplicada en el centro de gravedad del puente.
- Tensión del cable (T). Aplicada horizontalmente en el extremo.
- La bisagra permite que el puente gire, pero impide que se desplace en ninguno de los dos ejes, por lo que ejerce dos reacciones, (Rx y Ry) una en cada eje (pueden considerarse componentes de una reacción $\vec{R}$)

El puente está en equilibrio estático, por lo que sabemos que:
- no se desplaza → $\Sigma\vec{F} = 0$
- no gira → $\Sigma\vec{M}_O = 0$

Planteando las ecuaciones (no es necesario descomponer ninguna fuerza):

$$\Sigma\vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow \quad Rx - T = 0 \rightarrow \quad T = Rx \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow \quad Ry - Fg = 0 \rightarrow \quad Ry = Fg = 4000\ N \end{cases}$$

$\Sigma\vec{M}_O = 0 \quad \rightarrow \quad \Sigma M_{Oz} = 0$. Calculamos los momentos en módulo. Su dirección será la del eje z y su sentido vendrá dado por la regla de la mano derecha.

Reacciones Rx y Ry: No ejercen momento, ya que están aplicadas en el punto O.

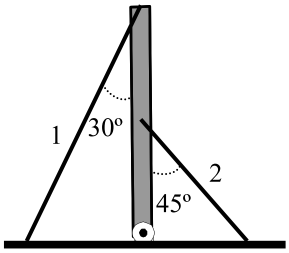
Peso: $M_{OFg} = r \cdot Fg \cdot sen30^o = 2{,}5m \cdot 4000N \cdot 0{,}5 = 5000\ Nm$ sentido negativo (giro horario)

Tensión: $M_{OTFg} = r \cdot T \cdot sen60^o = 5m \cdot T \cdot 0{,}866 = 4{,}33 \cdot T\ (Nm)$ sentido positivo (giro antihorario)

Sumamos $\Sigma M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad 4{,}33 \cdot T - 5000 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 1154{,}73\ N$

Resultados: Ry = 4000 N , Rx = T = 1154,73 N

Una antena de 100 kg y 20 m de altura está sostenida por dos cables 1 (unido al extremo de la antena) y 2 (unido a su punto medio), como indica la figura. La tensión que ejerce el cable 1 es de 500 N. Calcule razonadamente la tensión del cable 2 y las reacciones que ejerce la bisagra con que se une al suelo.



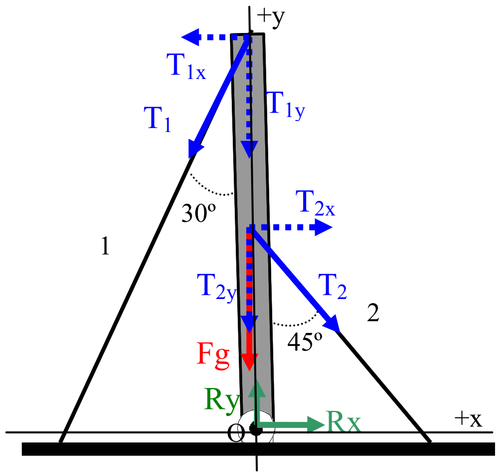
<u>Esquema de fuerzas</u>: Elegimos el punto O en el punto de apoyo con el suelo. Las fuerzas aplicadas son:

- Peso (Fg = m · g = 1000 N). Aplicada en el centro de gravedad de la antena (su centro).
- Tensiones de las cuerdas (T1 y T2). Aparecen descompuestas en el dibujo.

  $T_{1x} = T_1 \cdot sen30^o = 250\ N, \quad T_{1y} = T_1 \cdot cos30^o = 433\ N$

  $T_{2x} = T_2 \cdot sen45^o = 0{,}7 \cdot T_2, \quad T_{2y} = T_2 \cdot cos45^o = 0{,}7 \cdot T_2$

- En el apoyo con el suelo, la bisagra ejerce dos reacciones: Rx y Ry (las suponemos positivas).



La antena está en equilibrio estático, por lo que sabemos que:

- no se desplaza → $\Sigma\vec{F} = 0$
- no gira → $\Sigma\vec{M}_O = 0$

Planteando las ecuaciones

$$\Sigma\vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow \quad Rx + T_{2x} - T_{1x} = 0 \quad \rightarrow Rx + 0{,}7 \cdot T_2 - 250 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow \quad Ry - Fg - T_{1y} - T_{2y} = 0 \quad \rightarrow Ry - 1000 - 433 - 0{,}7 \cdot T_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma\vec{M}_O = 0 \quad \rightarrow \quad \Sigma M_{Oz} = 0\,.$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad \underline{\text{Módulo}}: \qquad M_O = r \cdot F \cdot sen\alpha$$

Calculamos los momentos en módulo. Su dirección será la del eje z y su sentido vendrá dado por la regla de la mano derecha.

Rx y Ry: No ejercen momento, ya que están aplicadas en el punto O.

Peso: $M_{OFg} = r \cdot Fg \cdot sen180^o = 0\ N \cdot m$. No ejerce momento ya que la fuerza es paralela a $\vec{r}$.

Tensión 1: $M_{OT1} = r_1 \cdot T_1 \cdot sen30^o = 20 \cdot 500 \cdot 0{,}5 = 5000\ N \cdot m$ sentido positivo (giro antihorario)

Tensión 2: $M_{OT2} = r_2 \cdot T_2 \cdot sen45^o = 10 \cdot T_2 \cdot 0{,}7 = 7 \cdot T_2\ N \cdot m$ sentido negativo (giro horario)

Sumamos $\Sigma M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad 5000 - 7 \cdot T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 714{,}3\ N$

$$\text{Sustituimos} \begin{cases} Rx + 0{,}7 \cdot 714{,}3 - 250 = 0 \quad \rightarrow \quad Rx = -250\ N \\ Ry - 1000 - 433 - 0{,}7 \cdot 714{,}3 = 0 \quad \rightarrow \quad Ry = 1750\ N \end{cases}$$

<u>*Resultados: T_2 = 714,3 N; Rx = -250 N; Ry = 1750 N*</u>

(El signo negativo de Rx indica que su sentido es el contrario al que hemos supuesto en el esquema)